قسم هندسة الحواسيب والأتمتة
السنة الثانية / الفصل الأول

التَحَليل العَددِي

المحاضرة الخامس عشر

5 صفحات

الدكتور: عماد فتاش

التاريخ: ٢٠١٤/١١/١٩

صيغ التكرار من الجملة التكرارية :

$$X_{k+1} = \tilde{B} - \tilde{A}X_k$$

$$k = 0\,,1\,,2\,\dots\,\dots.$$

x_0 معطاة

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \cdots \dots . a_{1n}x_n^{(k)}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots \dots . a_{2n}x_n^{(k)}}{a_{22}}$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - \cdots \dots . a_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k)}}{a_{nn}}$$

$k = 0\,,1\,,2\,\dots\,\dots.$ و x_0

لتكن الجملة كالمثال :

$$\begin{cases} 4x - y + z = 7 \\ 4x - 8y + z = -21 \\ -2x + y + 5z = 15 \end{cases}$$

سنلجأ إلى شكل آخر من الحل و ذلك بإيجاد صيغ التكرار.

نوجد x من المعادلة الأولى و y من الثانية و z من الثالثة . $x = \frac{7+y-z}{4}$

$y = \frac{21+4x+z}{8}$, $z = \frac{15+2x-y}{5}$

$$\begin{cases} x_{k+1} = \dfrac{7 + y_k - z_k}{4} \\ y_{k+1} = \dfrac{21 + 4x_k + z_k}{8} \\ z_{k+1} = \dfrac{15 + 2x_k - y_k}{5} \\ k = 0\,,1,2\,\dots\,.. \end{cases}$$

k	x_k	y_k	z_k
0	1.0	2.0	2.0
1	1.75	3.375	3.6
. .			
5	1.99114063	3.9953125	3.00053750
.			
15	1.9999993	2.9999985	2.9999993
. . 19	2.0……..0	4.0…..0	3.0……0

⇐ إذن المتتالية تتقارب من الحل (2,4,3)

إن شرط تقارب طريقة تكرار جاكوبي في حل جملة معادلات خطية : $AX = B$

$$a_{11}x_1 + \cdots \ldots \ldots .. + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots \ldots \ldots a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{n1}x_1 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots + a_{nn}x_n = b_n$$

$$\begin{cases} |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \\ i = 1, 2, 3 \ldots n \end{cases}$$

$$|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}|$$

$$|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}|$$

فإذا طبقنا هذا الشرط على مثالنا السابق فسنجد مايلي :

بالنسبة للمعادلة الأولى بالنسبة لـ" X " : $|4| > |-1| + |1|$

بالنسبة للمعادلة الثانية بالنسبة ل " y" : $|-8| > |4| + |1|$

بالنسبة للمعادلة الثالثة بالنسبة ل" Z" : $|5| > |-2| + |1|$

⇐ الجملة متقاربة

مثال :"دورة"

$$10x - 5y - 2z = 3$$

$$4x - 10y + 3z = -3$$

$$x + 6y + 10z = -3$$

اول مانقوم به هو اختبار هذه الجملة بهذا الترتيب ما اذا كانت محققة لشرط التقارب أم لا فاذا كانت غير محققة نحاول تغير ترتيب الجملة بمايناسب ويتلائم مع تحقق شرط التقارب

من المعادلة الأولى بالنسبة ل"X " $|10| > |-5| + |-2|$

من المعادلة الثانية بالنسبة ل " y" $|-10| > |4| + |3|$

من المعادلة الثالثة بالنسبة ل" Z" $|10| > |1| + |6|$

وهذه المعادلات محققة لشرط الحل .

"بما ان شعاع البدء لم يعطى لدينا اذا فالشعاع هو الشعاع الصفري "

- **طريقة غاوس _سايدل**

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12}.x_2^{(k)} \dots \dots . a_{1n}.x_n^{(k)}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21}.x_1^{(k+1)} \dots \dots . a_{2n}.x_n^{(k)}}{a_{22}}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{31}.x_1^{(k+1)} - a_{32}.x_2^{(k+1)} - a_{34}.x_4^{(k)} \dots . a_{3n}.x_n^{(k)}}{a_{33}}$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b - a_{n1}.x_1^{(k+1)} - a_{n2}.x_2^{(k+1)} \dots . a_{n,k-1}.x_{n-1}^{(k+1)}}{a_{nn}}$$

$i = 0,1,2, \dots, x_0$ معطاة

مثال : طبق غاوس سايدل في حل جملة السابقة:

$$x_{k+1} = \frac{7 + y_k - z_k}{4}$$

$$y_{k+1} = \frac{21 + 4x_{k+1} + z_k}{2}$$

$$z_{k+1} = \frac{15 + 2x_{k+1} - y_{k+1}}{5}$$

$x_0(1,2,2)$

k	x_n	y_n	z_k
0	1.0	2.0	2.0
1	1.75	3.75	2.95
:	:	:	:
8	1.999999983	3.99999982	2.99999996
10	2.0………0	4.0……….0	3.0……….0

تتقارب طريقة غاوس سايدل بسرعة اكبر في الحل .⇐ نستنتج ان هذه الطريقة اسهل

ملاحظة :

تم اخذ الجملة السابقة المحققة لشرط التقارب اما في الحالة العامة لحل المثال من خلال هذه الطريقة يجب علينا إيجاد الصيغ التي تحقق شروط التقارب كما فعلنا سابقا

مثال : "طريقة جاكوبي"

$$3u + v = 5$$

$$u + 2v = 5$$

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

جملة التكرار $v = \frac{5-u}{2}$, $u = \frac{(5-v)}{3}$

ومنه نجد ان شرط التقارب محقق

$$v_{k+1} = \frac{5 - u_k}{2} \quad , \quad u_{k+1} = \frac{5 - v_k}{3}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad , \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \quad , \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{9} \\ \frac{25}{12} \end{pmatrix}$$

سنجرب حل هذا المثال بطريقة غاوس _سايدل .وتكون ال "u" من المعادلة الأولى لانها محققة للشرط

$$u_{k+1} = \frac{5 - v_k}{3} \quad , v_{k+1} = \frac{5 - u_{k+1}}{2} \quad , k = 0,1,2, \ldots.$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \quad , \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{9} \\ \frac{35}{18} \end{pmatrix} \quad , \begin{pmatrix} u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{55}{54} \\ \frac{215}{108} \end{pmatrix}$$

مثال :

طبق طريقة غاوس _سايدل على الجملة :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u_{k+1} = \dfrac{4 - v_k + w_K}{3} \quad , \mathrm{v_{k+1}} = \dfrac{1 - 2\mathrm{u_{k+1}} - \mathrm{w_k}}{4} \quad , \quad w_{k+1} = \dfrac{1 + u_{k+1} - 2v_{k+1}}{5}, \\ k = 0,1,2, \dots . \quad , x_0 = \begin{pmatrix} u_0 = 0 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.3333 \\ -0.4167 \\ 0.6333 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1.6833 \\ -0.7500 \\ 0.8367 \end{pmatrix}$$

نستمر في الحل الى دقة معينة تكون معطاة او الى أي مرحلة يتم اعلامنا بها.

إن بلوغ هدفك في الحياة يحتاج إلى الشجاعة ؛

شجاعة لا تقل عن شجاعة الجندي في أرض المعركة